الحل العددي لمعادلة برجر باستخدام بعض طرق الفروق المنتهية في بعد واحد

نجية محمد أبوجلالة[1]، تهاني محمد سلامة[2]*، سمية محمد أبوجلالة[3]
[1] قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة مصراتة، مصراتة، ليبيا
[3, 2] قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة مصراتة، مصراتة، ليبيا
*t.salama@sci.misuratau.edu.ly

تاريخ الاستلام: 01- 07- 2021 تاريخ القبول: 13- 07-2021 تاريخ النشر: 01- 10- 2021

الملخص
في هذا البحث تم اشتقاق طريقتين عدديتين لحل معادلة برجر(Burger's equation) باستخدام تقنية الفروق المنتهية (طريقة الفروق الأسية و طريقة فرانكل دي فورت). كذلك تم دراسة استقرار الطريقتين باستخدام تقنية Von Neumann. ولاختبار مدي فاعلية و كفاءة الطريقتين في حل معادلة برجرتم تطبيق الطرق علي مسالتين مختلفتين.
الكلمات المفتاحية: معادلة برجر، طريقة الفروق المنتهية الأسية، طريقة دي فورت- فرانكل، الاستقرار .

المقدمة Introduction

من المعروف أن أغلب الظواهر المشهورة التي تظهر في الفيزياء الرياضية يمكن أن توصف بالمعادلات التفاضلية علي سبيل المثال ، إذ يتضح ذلك جلياً في وصف عمليات انتقال الحرارة ، وكذلك وصف معادلات الانتشار(Diffusion Equations) اللاخطية التي تؤدي دوراً مهماً في الأنظمة الحركية ومن اشهر الأمثلة علي معادلات الانتشار اللاخطية معادلة برجرBurger(انظر [1-3]). ان معادلات الانتشار هي مسائل قيم ابتدائية والتي تكون في حالة معتمدة على الزمن والحل لهذا النوع من المسائل يكون في منطقة مفتوحة Rالتي تخضع لشروط حدودية ، وبصورة عامة انه امكانية الحصول علي الحلول الفعلية لمسائل الانتشار في الغالب تكون معقدة او غير ممكنة فلذلك ظهرت عدة دراسات تهتم بالحل العددي لهذه المعادلة. حيث تم حل معادلة برجر باستخدام طريقة العناصر النهائية في [9] و [10]. كذلك تم دراسة حل معادلة برجر باستخدام طريقة الفروق المنتهية حيث [8] استخدم فروقات منتهية من الرتبة الرابعة لتقريب المشتقات الجزئية. وفي [7] تم حل المعادلة باستخدام طريقة المستقيمات حيث تم تحويل معادلة برجر مع شروط روبن الي معادلة تفاضلية عادية تم حل المعادلات الناتجة.

في هذه الورقة تم دراسة الحل العددي لمعادلة برجر مع شروط ديرشليه باستخدام طريقتين من طرق الفروق المنتهية الأولي طريقة الفروق المنتهية الأسية والثانية طريقة فرانكل دي فورت. كذلك تم دراسة الاستقرارلكلا الطريقتين باستخدام تقنية فان نيومان.

اشتقاق طريقة الفروق المنتهية الأسية

Derivation of the Exponential Finite Difference Method

في هذه الورقة سنعتبر معادلة برجر علي الصورة:[6]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

حيث

$$u(x,0)=u_0(x)$$
$$u(1,t)=f_1(t), u(0,t)=f_2(t)$$
$$0<x<1 \ , t>0 \ , v>0$$

من اشهر االاساليب المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية هو تقريب المشتقات الجزئية باستخدام الفروق المنتهية. المشتقات الجزئية الاولي والثانية للدالة u بالنسبة لـ $x,\ t$ تكون:(انظر [4])

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_{i+1}^{j}-u_{i-1}^{j}}{2h} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u_{i+1}^{j}-2u_i^{j}+u_{i-1}^{j}}{h^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_i^{j+1}-u_i^{j-1}}{2k} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{k^2} \qquad (6)$$

من المعادلة (1) :

$$\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t}=f'(u)\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (7)$$

وباستخدام المعادلة (5) نحصل علي:

$$f\left(\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}\right)=f'(u_i^j)\left(v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j-u_i^j\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j\right) \qquad (8)$$

$$f(u_i^{j+1})=f(u_i^j)+kf'(u_i^j)\left(v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j-u_i^j\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j\right)$$

وبفرض أن $f(u)=\ln u$ نحصل علي:

$$u_i^{j+1}=u_i^j exp\left\{\frac{k}{u_i^j}\left(v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j-u_i^j\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j\right)\right\} \qquad (9)$$

وباستخدام الفروق المركزية للمشتقات u_x , u_{xx} المتمثلة بالمعادلات (2)،(3) وتعويضها في المعادلة (9) نحصل علي:

$$u_i^{j+1}=u_i^j exp\left\{\frac{1}{u_i^j}\{vr(u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j)\}-\frac{rh}{2}(u_{i+1}^j-u_{i-1}^j)\right\} \qquad (10)$$

حيث $r=\frac{k}{h^2}$.

تحليل الاستقرار لطريقة الفروق المنتهية الأسية

Stability Analysis of Exponential Finite Difference Method

لدراسة استقرار هذه الطريقة نستخدم اسلوب فان نيومان حيث يتم استبدال الحل u_i^j بالصيغة $\psi(t)e^{I\beta x}$ في المعادلة (9) حيث β هو عدد موجب$I=\sqrt{-1}$. [5].

$$\psi(t+k)e^{i\beta x}$$
$$=\psi(t)e^{i\beta x}exp\left\{\frac{k}{\psi(t)e^{i\beta x}}\left(v\left(\frac{\psi(t)e^{i\beta(x+h)}-2\psi(t)e^{i\beta x}+\psi(t)e^{i\beta(x-h)}}{h^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\psi(t)e^{i\beta x}\left(\frac{\psi(t)e^{i\beta(x+h)}-\psi(t)e^{i\beta(x-h)}}{2h}\right)\right)\right\}$$

$$\psi(t+k)=\psi(t)exp\left\{\frac{vk(e^{i\beta h}-2+e^{-i\beta h})}{h^2}-\frac{k\psi(t)e^{i\beta x}(e^{i\beta h}-e^{-i\beta h})}{2h}\right\}$$

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)}=exp\left\{\frac{vk(2\,cos(\beta h)-2)}{h^2}-\frac{k}{2h}\psi(t)e^{i\beta x}(2i\,sin(\beta h))\right\}$$

وبمأن الجزء الحقيقي هو الذي يؤدي الي الاستقرارية لذلك نهمل الجزء التخيلي فنحصل علي:

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)}=exp\left\{\frac{-2vk}{h^2}(1-cos(\beta h))\right\}$$

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = exp\left\{-4rv\, sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right\}$$

اي انه تكون الطريقة مستقرة اذا تحقق الشرط:

$$\left|\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)}\right| = |\xi| \leq 1$$

وبمأن ξ هو عدد مركب علية فإن

$$|\xi| = e^A \leq 1$$

وبمأن $A \leq 0$ إذاً الطريقة مستقرة بدون شرط.

اشتقاق طريقة فرانكل دي فورت

Derivation of Du fort-Frankel Method

بالتعويض عن المشتقات الجزئية لـ x , t المتمثلة بالمعادلات (4)،(3)،(2) في المعادلة (1) نحصل علي:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2k} = v\left(\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}\right) - u_i^j\left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}\right)$$

بذلك نتحصل علي

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} + 2vr\left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right) - rhu_i^j\left(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j\right)$$

حيث $r = \frac{k}{h^2}$

دراسة الاستقرار لطريقة فرانكل دي فورت

Stability Analysis of Du fort-Frankel Method

بنفس الاسلوب المتبع في دراسة الاستقرار للطريقة السابقة نحصل علي:

$$\psi(t+k)e^{i\beta x} = \psi(t-k)e^{i\beta x} + 2vr\left(\psi(t)e^{i\beta(x+h)} - 2\psi(t)e^{i\beta x} + \psi(t)e^{i\beta(x-h)}\right) - rh\psi(t)e^{i\beta x}\left(\psi(t)e^{i\beta(x+h)} - \psi(t)e^{i\beta(x-h)}\right)$$

بذلك

$$\psi(t+k) = \psi(t-k) + 2vr\left(\psi(t)e^{i\beta h} - 2\psi(t) + \psi(t)e^{-i\beta h}\right) - rh\psi(t)\psi(t)e^{i\beta x}\left(2isin(\beta h)\right)$$

بحذف الجزء التخيلي نحصل علي:

$$\psi(t+k) = \psi(t-k) + 2vr\psi(t)\left(2cos(\beta h)\right) - 2$$
$$= \psi(t-k) - 8vr\psi(t)\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

اي ان الطريقة تكون مستقرة اذا تحقق الشرط

$$\left|\frac{\psi(t+k) - \psi(t-k)}{\psi(t)}\right| \leq |\xi\,| \leq 1 \qquad (11)$$

$$|-8rv| \leq 1$$
$$|8rv| \leq 1$$
$$-1 \leq 8rv \leq 1$$

حيث $r \geq 0$ اي ان

$$8rv \leq 1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{8v}$$

اي ان طريقة فرانكل دي فورت تكون مستقرة عندما $0 \leq r \leq \frac{1}{8v}$.

النتائج العددية Numerical Results

لاظهار مدي كفاءة و فاعلية الطرق التي تم اشتقاقها في هذا البحث، تم تطبيق الطرق علي مسالتين مختلفتين.

مسالة 1:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ;\ 0<x<\frac{1}{2}\ ,t>0\ ,v=1; v=0.1;$$

$$u(x,0)=\frac{1}{1+e^{\frac{x}{2v}}}$$

$$u(0,t)=\frac{1}{1+e^{-\frac{t}{4v}}};\ u\left(\frac{1}{2},t\right)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{4v}-\frac{t}{4v}}};$$

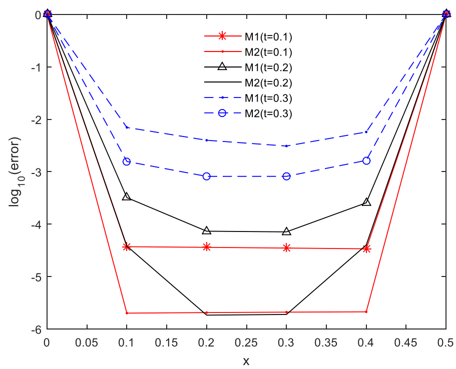
الحل الفعلي:

$$u(x,t)=\frac{1}{1+e^{\frac{x}{2v}-\frac{t}{4v}}};\ h=0.1,\Delta t=0.1.$$

انظر المرجع[7].

جدول (1) مقارنة النتائج العددية للمسألة 1 المتحصل عليها من الطريقتين M1 (طريقة الفروق المنتهية الاسية) ، M2 (طريقة دي فورت فرانكل) مع الحل الفعلي (Exact solution) عندما $v=1$.

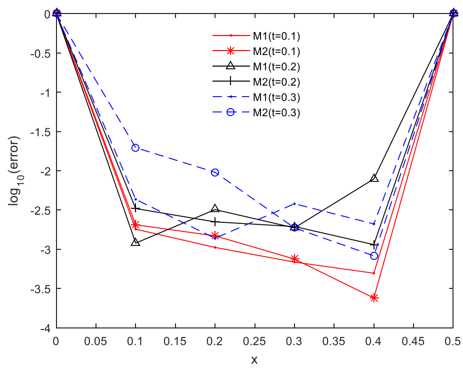
x_i	t_i	M1	M2	Exact
0.1	0.1	0.493787535999616	0.493748312840772	0.493750325500490
	0.2	0.499678931274720	0.500038235131375	0.500000000000000
	0.3	0.513242182122509	0.504681314836676	0.506249674499510
0.2	0.1	0.481294933201678	0.481256721340044	0.481258784121465
	0.2	0.487576076703339	0.487500760183329	0.487502603515790
	0.3	0.489764233001807	0.494566230529945	0.493750325500490
0.3	0.1	0.468825680738970	0.468788523913197	0.468790626626244
	0.2	0.475092151952703	0.475018913786022	0.475020812521060
	0.3	0.478167156792947	0.482075929012050	0.481258784121465
0.4	0.1	0.456395243670260	0.456359180368790	0.456361312762921
	0.2	0.462314661822462	0.462610264840592	0.462570154656250
	0.3	0.474523250374340	0.467144128001326	0.468790626626244



شكل(1) يوضح مقدار الخطا الناتج من حل مسالة 1 باستخدام الطريقتين M1, M2 **عندما $v=1$ t=0.1, 0.2, 0.3,**

جدول (2) مقارنة النتائج العددية للمسألة 1 المتحصل عليها من الطريقتين M1 (طريقة الفروق المنتهية الاسية) ، M2 (طريقة دي فورت فرانكل) مع الحل الفعلي (Exact solution) عندما $v = 0.1$.

x_i	t_i	M1	M2	Exact
0.1	0.1	0.4396236776222906	0.4357754786795365	0.4378234991142019
	0.2	0.5011962288538906	0.5032961115560017	0.500000000000000
	0.3	0.5664942125610779	0.5425190310861641	0.5621765008857981
0.2	0.1	0.3218750035581752	0.3193413829792363	0.3208213008246070
	0.2	0.3807397355194106	0 .3753100259632955	0.3775406687981454
	0.3	0.4392015637794504	0.4473729750232903	0.4378234991142018
0.3	0.1	0.2233852491447040	0.22194991376800360	0.2227001388253088
	0.2	0.2708105319321334	0.2669970289852506	0.2689414213699951
	0.3	0.3246150873854245	0.3189489997857115	0.3208213008246071
0.4	0.1	0.1485419515966825	0.1478083232371602	0.1 480471980316895
	0.2	0.1832114302686853	0.11812809864760861	0.1824255238063563
	0.3	0.2247989008466272	0.22218765408531808	0.2227001388253088



شكل(2) يوضح مقدار الخطا الناتج من حل مسالة 1 باستخدام الطريقتين M1, M2 **عندما $v = 0.1$ t=0.1, 0.2, 0.3,**

مسالة 2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; ; \; 0 < x < 1 \; , t > 0 \; , v = 1 ; v = 0.1$$

$$u(x,0) = 4x(1-x)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0;$$

الحل الفعلي:

$$u(x,t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} n d_n \sin(n\pi x) \exp(-n^2\pi^2 vt)}{d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\pi x) \exp(-n^2\pi^2 vt)}$$

حيث

$$d_0 = \int_0^1 \exp(-x^2(3v)^{-1}(3-2x))dx \, , \mathrm{h} = 0.25, \qquad \Delta t = 0.001.$$

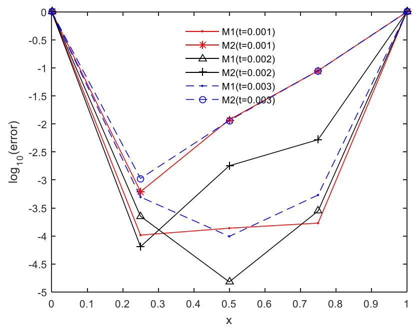
$$d_n = 2\int_0^1 \exp\left(-x^2(3v)^{-1}(3-2x)\right) \cos(n\pi x) \, dx ; n = 1,2,3, \dots, N$$

حيث تم اختيار N=10, 60

انظر المرجع[8].

جدول (3) مقارنة النتائج العددية للمسألة 2 المتحصل عليها من الطريقتين M1 (طريقة الفروق المنتهية الاسية)، M2 (طريقة دي فورت فرانكل) مع الحل الفعلي (Exact solution) عندما $N = 10, v = 1$.

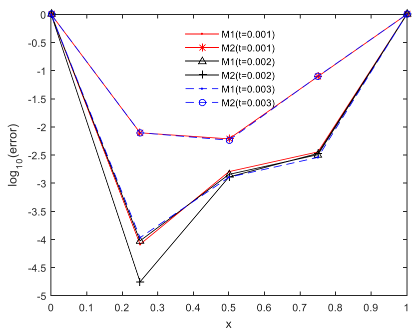
x_i	t_i	M1	M2	Exact
0.25	0.001	0.740559913432	0.75547425130	0.7404561751
	0.002	0.731323274215	0.99467542340	0.7310985651
	0.003	0.722282879621	0.66861605150	0.7217874373
0.5	0.001	0.992031914837	0.74534211946	0.9921698356
	0.002	0.9 8405862720	0.99853674912	0.9840434860
	0.003	0.976084786862	0.75156404244	0.9759864381
0.75	0.001	0.7435280854	0.75092237334	0.7433583432
	0.002	0.73711075863	0.99305003664	0.7368326081
	0.003	0.730746506615	0.67000321648	0.7302078261



شكل(3) يوضح مقدار الخطا الناتج من حل مسالة 2 باستخدام الطريقتين M1, M2 **عندما t=0.001, 0.002, 0.003, v=1**

جدول (4) مقارنة النتائج العددية للمسألة 2 المتحصل عليها من الطريقتين M1 (طريقة الفروق المنتهية الاسية)، M2 (طريقة دي فورت فرانكل) مع الحل الفعلي (Exact solution) عندما $N = 60, v = 0.1$.

x_i	t_i	M1	M2	Exact
0.25	0.001	0.74770352306	0.75547425130	0.7476216483
	0.002	0.74541887865	0.745342119463	0.7453244913
	0.003	0.74314599745	0.750922373344	0.7430385145
0.5	0.001	0.99920031991	0.99467542339	1.000802996
	0.002	0.998394661213	0. 99853674912	0.9998250246
	0.003	0.97583096550	0.99305003664	0.9988559539
0.75	0.001	0.750700326768	0.668616051499	0.7471080023
	0.002	0.751397329620	0.75156404244	0.7481878827
	0.003	0.752090991773	0.67000321648	0.7492214064



شكل(4) يوضح مقدار الخطا الناتج من حل مسالة 2 باستخدام الطريقتين M1, M2 **عندما t=0.001, 0.002, 0.003, v=0.1**

الخلاصة

في هذه الورقة تم حل معادلة برجر باستخدام طريقة الفروقات الأسية وطريقة دي فورت فرانكل. وكذلك تم دراسة استقرار الطريقتين باستخدام طريقة فان نيومان وكانت طريقة الفروقات الأسية مستقرة بدون شرط بينما الطريقة الثانية مستقرة بصورة مشروطة والشرط هو $0 \leq r \leq \frac{1}{8v}$. من خلال النتائج العددية المتحصل عليها اظهرت النتائج مدى كفاءة الطريقتين في حل معادلة برجر.من خلال اخذ قيم مختلفة v .

References المراجع

1) Logan, J.D. (1994). An Introduction to Nonlinear partial Differential Equation , John wiley, New York.

2) Duffy, D.J. (2006). Finite Differential Equation Approach, England, The Atrium, Southern Gate, chi-chester,West Sussex po198 SQ, John wiley & Sons ltd.

3) Leonenko, N.N. and Meluikovn (2001). Renarmahzation and Homogenization of the solutions of heat eqution with linear potential and relatd Burgers equation with random data, Theory probab & Math. Statistics 1, pp.27-64.

4) Mitchell, A.R. and Griffiths, D.F. (1980). The Finite Difference Method In partial Differential Equation, John wiley & Sons. Chichester. New York 515-353.QA37479, 40626.

5) Handschuh, R.F., Theo, G. K. (1988). Applications of an Exponential Finite Difference Technique, NASA, Technical Memorandum 100939, AVSCOM, Technical Memorandum 88-c-004.

6)Wany X.Y, Z.S.Zhus and Y.K.LU. (1990). Solitary wave solution of the Generalized Burgers-Huxley Equation, phys.A: Math.Gen.23, pp. 271-274.

7) Biazar,J., Ayati, Z. and Shahbazi, S. (2014). Solution of the Burgers Equation by the Method of Lines, American Journal of Numerical Analysis,Vol. 2, No. 1, 1-3.

8) Biazar,J., Ayati, Z., Shahbazi, S., Hassanien, I.A., Salama ,A.A. and Hosham, H.A.(2005). Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation, Applied Mathematics and Computation 170, 781–800.

9)Atoull, J.A and King, B.B. (2000). Stabilized Finite Element Methods and Feed back controlfor Burger Equation, American control conference, pp. 25-31.

10) Kakuda, K. and Tosaka, N. (1990). The generalized boundary element approach to burger's equation, International J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29,pp. 245-261.

Some Finite Difference Methods for Numerical Solution Burger's Equation in One Dimension

Najia M. Abujalala[1], T.S. Mohamed[2*] and Sumaia M. Abujalala [3]
[1]Mathimatics Department, Faculty of Education, Misurata University, Misurata, Libya
[2,3]Mathimatics Department, Faculty of Sciences, Misurata University, Misurata, Libya
[*]E-mail: t.salama06@gmail.com

Abstract:
In this study, we present two finite differences methods for the solution Burger's equation. The stability analysis of the two methods by using Von Neumann technique has been done. Numerical results for two different test problems are given.
Keywords: Burger's equation, Exponential finite difference method, Du fort-Frankel method, Numerical stability.